В. М. Гуровиц, В. В. Ховрина

Графы

Издательство МЦНМО
Москва, 2009

УДК 519.17
ББК 22.176
Г95

Поддержано Департаментом образования г. Москвы в рамках программы «Одарённые дети»

Гуровиц В. М., Ховрина В. В.
Графы.— М.: МЦНМО, 2008.— 32 с.: ил.
ISBN 978-5-94057-468-2

Вторая брошюра серии ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ посвящена графам. В ней приведены четыре занятия по этой теме, в которых подобран материал для начального знакомства с графами, адресованный школьникам 6–8 классов и руководителям кружков. Несмотря на то, что в школьном курсе математики термин «граф» отсутствует, авторам представляется важным познакомить школьников с этими объектами, научить оперировать соответствующими терминами и использовать их при решении задач.

В дальнейшем предполагается выпустить еще несколько брошюр, в которых эта тема будет развиваться для старших школьников.

Надеемся, что книжка будет интересна также учителям математики, студентам педагогических вузов и всем, кто занимается со школьниками.

Владимир Михайлович Гуровиц, Вера Викторовна Ховрина

Графы

Серия «ШКОЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ КРУЖКИ»

Технический редактор *Е. С. Горская*

Лицензия ИД № 01335 от 24.03.2000 г. Подписано в печать 22.12.2008 г.
Формат 60 × 88 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Объем 2 печ. л.
Тираж 2000 экз.

Издательство Московского центра непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. 241-05-00.

Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография ”САРМА”»

ISBN 978-5-94057-468-2

Предисловие

В школьной программе по математике термин «граф» отсутствует. При этом в различных областях математики, а также в компьютерных науках, в электронике и других дисциплинах (в том числе в экономике) графы используются повсеместно. Поэтому так важно познакомить школьников с этими математическими объектами и их свойствами, научить оперировать соответствующими терминами и использовать их при решении задач.

Теория графов — относительно молодая область математики (первая работа Леонарда Эйлера о Кёнигсбергских мостах, с которой началось развитие теории графов, была опубликована в 1736 году, а сам термин *граф* появился лишь спустя 200 лет: его впервые использовал в 1936 году венгерский математик Денеш Кёниг). Но, несмотря на это, изложить все результаты, полученные математиками в этой области, невозможно даже в очень толстой книге. Поэтому знакомство школьников с теорией графов придётся разбить на несколько частей. Отдельные занятия можно проводить подряд, в рамках одного курса (например, в летней школе) либо на отдельных кружках, возможно, со значительными перерывами между ними.

Нам кажется целесообразным знакомить школьников с графами постепенно, начиная в 6 – 7 классе (а может быть и раньше!) и продолжая в старших классах, постепенно переходя к более сложным понятиям и результатам.

Приведём список занятий, которые мы предлагаем в данной (первой) брошюре.

Занятие первое. *Знакомство с графами. Степень вершины.*

Рассчитано на учащихся 6 – 7 классов. Дополнительных знаний не требуется.

Занятия второе. *Двудольные графы. Лемма о рукопожатиях.*

Рассчитано на учащихся 6 – 7 классов. Школьники должны быть знакомы с понятием чётности.

Занятие третье. *Основные понятия. Обходы.*

Рассчитано на учащихся 6 – 7 классов. Школьники должны быть знакомы с понятием чётности, азами комбинаторики, методом доказательства «от противного».

Занятие четвертое. *Деревья.*

Рассчитано на учащихся 7 – 8 классов. Школьники должны владеть техникой (неформальных) индуктивных рассуждений (явно применять метод математической индукции не потребуется).

Материалы каждого занятия разбиты на 3 части:

— теоретический материал для обсуждения на занятии: определения, утверждения с доказательствами и комментариями, примеры;

— задачи, предлагаемые на занятии;

— решения задач и методические комментарии.

Кроме того, в конце книги приводится список задач, расширяющих и дополняющих темы занятий, а также список литературы и web-сайтов, где можно пополнить запас задач и почерпнуть дополнительные теоретические сведения.

В отдельном приложении приводятся формальные определения тех понятий, которые используются в материалах занятий.

Авторы выражают благодарность А.В. Шаповалову за подробное обсуждение текста и предложенные задачи.

Занятие 1

Знакомство с графами. Степень вершины

Цель данного занятия познавательная: дать ребятам представление о графах, показать на примерах, в каких типах задач они используются, и продемонстрировать, как правильно записать решение с их помощью.

Занятие состоит из двух частей: в первой части предлагаются задачи, в которых требуется лишь изобразить описанную в условии ситуацию в виде графа и сделать вывод на основании рисунка. Решение подобных задач демонстрируется на примерах.

Вторая часть посвящена понятию *степень вершины* и простейшим утверждениям о степенях вершин. Здесь разбираются соответствующие определения, демонстрируются примеры и приводятся задачи на подсчёт рёбер.

Изображения графов

Пример 1. В деревне 9 домов. Известно, что у Петра соседи Иван и Антон, Максим сосед Ивану и Сергею, Виктор — Диме и Никите, Евгений — сосед Никиты, а больше соседей в этой деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Пётр огородами пробраться к Никите за яблоками?

Ответ: нет, не может.

Решение. Выпишем имена мальчиков и соединим соседей линиями:

Сергей — Максим — Иван — Пётр — Антон

Дима — Виктор — Никита — Евгений

Основная идея, которую нужно продемонстрировать при обсуждении данной задачи: рисунок помогает решению.

Пример 2. В трёх вершинах пятиугольника расположили по фишке (см. рис. 1а). Разрешается двигать их по диагонали в свободную вершину. Можно ли такими действиями добиться того, чтобы одна из фишек вернулась на первоначальное место, а две другие поменялись местами (см. рис. 1б)?

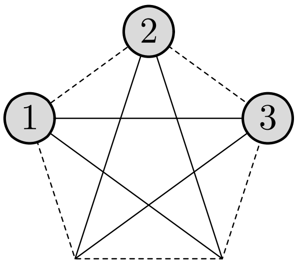

Рис. 1а

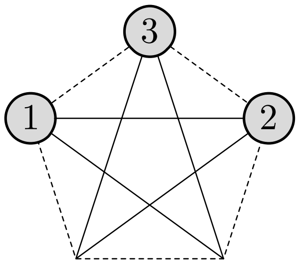

Рис. 1б

Ответ: нет, нельзя.

Решение. Заметим, что диагонали пятиугольника образуют один замкнутый *цикл*. Представим себе, что фишки — это пуговицы, нанизанные на нитку (см. рис. 1в). Ясно, что если двигать пуговицы по нитке, то поменять местами две пуговицы нельзя.

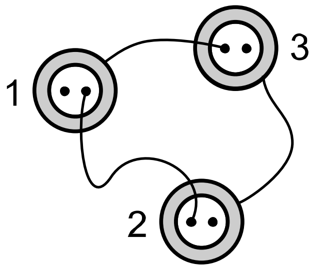

Рис. 1в

Этот пример повторяет ту же идею: изобразить ситуацию из условия задачи на рисунке, но демонстрирует более изощренные рассуждения.

Определение 1. *Графом* называется конечное множество точек, некоторые из которых соединены линиями. Точки называются вершинами графа, а соединяющие линии — рёбрами. (Каждое ребро соединяет ровно две вершины.)

Примерами графов могут служить: любая карта дорог, схема метро, электросхема, чертёж прямоугольника и т. д.

Здесь стоит нарисовать несколько примеров графов, обратить внимание на то, что граф может быть несвязным (состоять из нескольких «частей»), которые называют *компонентами связности*, и даже могут присутствовать вершины, из которых не исходит ни одного ребра (*изолированные вершины*).

Как правило, графы, у которых вершина соединена ребром сама с собой и графы, в которых пара вершин соединена несколькими рёбрами, не рассматриваются, хотя иногда такие графы также бывают нужны.

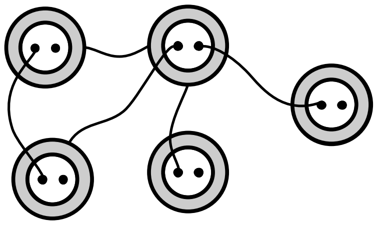

Рис. 2а

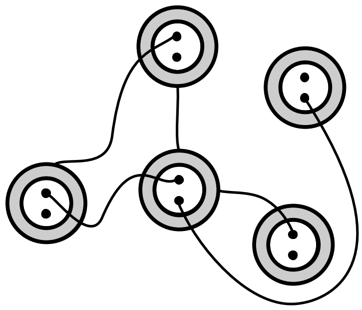

Рис. 2б

Полезно также представить граф как набор пуговиц, некоторые из которых соединены нитями. При этом, где именно расположены пуговицы, и как проходят нити — не важно: граф от этого не меняется, важно лишь то, какие пары пуговиц соединены нитями (см. рис. 2а, б).

Степень вершины

Определение 2. *Степенью* (или *порядком*) вершины называется количество рёбер, исходящих из этой вершины. Вершина называется *чётной*, если из нее выходит чётное число рёбер, и *нечётной*, если из неё выходит нечётное число рёбер.

Так, например, в графе, изображенном на рисунке 3, вершина A имеет степень 3, вершина B — степень 2, вершина C — степень 1.

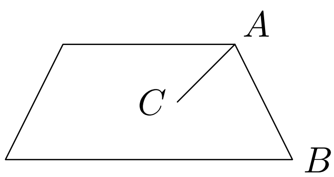

Рис. 3

Задачи

Задача 1. Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля — Меркурий, Плутон — Венера, Земля — Плутон, Плутон — Меркурий, Меркурий — Венера, Уран — Нептун, Нептун — Сатурн, Сатурн — Юпитер, Юпитер — Марс и Марс — Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

Задача 2. Четыре шахматных коня — два чёрных и два белых — расположены в угловых клетках доски 3×3, как показано на рисунке 4. Кони могут передвигаться на свободные клетки по обычным правилам. Можно ли сделать так, чтобы в верхних углах стояли белые кони, а в нижних — чёрные?

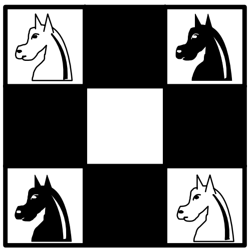

Рис. 4

Прежде чем школьники перейдут к решению данной задачи, стоит напомнить, как ходит шахматный конь.

Задача 3. Можно ли выписать в ряд цифры от 0 до 9 так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих цифр делилась либо на 5, либо на 7, либо на 13?

Задача 4. а) В фирме 50 компьютеров, некоторые пары компьютеров должны быть соединены кабелями. От каждого компьютера должно отходить по 8 кабелей. Сколько всего понадобится кабелей?

б) В графе 40 вершин, каждая степени 7. Сколько рёбер в графе?

в) На концерте каждую песню исполняли двое артистов, и никакая пара не выступала вместе более одного раза. Всего было 12 артистов, каждый выступил по 5 раз. Сколько было песен?

Задача 5. В стране 15 городов, каждый из которых соединён дорогами не менее чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно добраться в любой другой (возможно, проезжая через другие города).

Задача 6. На дискотеке каждый мальчик танцевал ровно с десятью девочками, а каждая девочка — ровно с девятью мальчиками. Кого было больше: мальчиков или девочек?

Решения и методические комментарии

Изображения графов

Задача 1. Ответ: нет, нельзя.

Нарисуем схему (построим граф, см. рис. 5): планетам будут соответствовать точки, а соединяющим их маршрутам — отрезки.

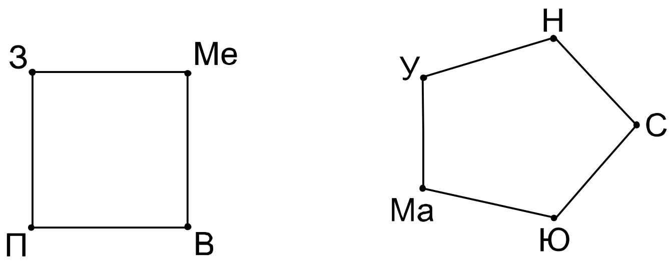

Рис. 5

Что же получили в итоге? По нарисованной схеме понятно, что долететь от Земли до Марса нельзя.

Задача 2. Ответ: нет, нельзя.

Занумеруем клетки доски числами, как показано на рисунке 6а. Построим граф (см. рис. 6б), вершины которого будут соответствовать клеткам доски, а ребра соединять клетки, находящиеся на расстоянии одного хода коня (то есть такие клетки, что из одной в другую можно попасть за один ход коня).

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Рис. 6а

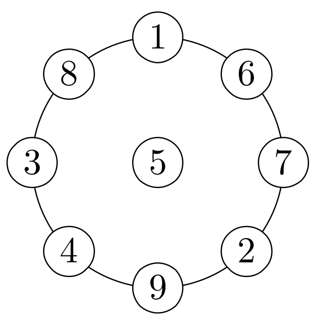

Рис. 6б

Изначально кони расположены так: на клетках 1 и 9 — чёрные, а на 3 и 7 — белые. Чтобы выполнить требуемые по условию задачи перестановки коней, нужно, чтобы, двигаясь по вершинам графа, какие-то два разноцветных коня «перешагнули» друг через друга. Однако по условию это не разрешается, следовательно, требуемое перемещение невозможно.

Задача 3. Ответ: нет, нельзя.

За вершины примем цифры 0, 1, 2, ..., 9. Если сумма двух рядом стоящих цифр делится на 5, либо на 7, либо на 13, то соединим соответствующие вершины ребром. Получим граф:

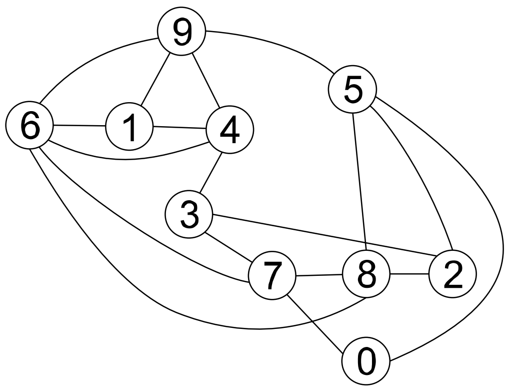

Рис. 7

Теперь несложно получить одно из возможных нужных расположений цифр: 0 – 7 – 3 – 4 – 6 – 1 – 9 – 5 – 2 – 8.

Эта задача — представитель ещё одного класса задач, в которых можно использовать графы: задачи на расстановки чисел или каких-то других элементов в определенном порядке.

Степень вершины

Задача 4. Ответ: а) 200 кабелей; б) 140 рёбер; в) 30 песен.

а) У кабеля два конца, а от каждого компьютера отходит по 8 концов. Значит, всего есть $50 \cdot 8 = 400$ концов и $\frac{400}{2} = 200$ кабелей.

б) Мысленно представив рёбра графа в виде кабелей, и подсчитав концы рёбер, получим, что всего рёбер $\frac{40 \cdot 7}{2} = 140$.

в) Соединим пару артистов ребром, если они вместе пели. Получим граф с 12 вершинами степени 5, каждой песне соответствует ребро. Аналогично предыдущему, в графе $\frac{12 \cdot 5}{2} = 30$ рёбер, то есть было 30 песен.

Здесь следует пояснить школьникам, что рёбра считать легче, чем песни: их можно рисовать, резать на части (концы) и т. п. Именно это свойство — наглядность — и обусловило столь широкое распространение языка графов.

Задача 5. Рассмотрим города A и B, не соединенные дорогой. Рассмотрим 7 городов, в которые можно добраться из A, и 7 городов, в которые можно добраться из B. Эти 14 городов не могут быть все различны, так как тогда вместе с A и B получилось бы 16 городов. Значит, есть город C, в который можно добраться как из A, так и из B. Значит, из A в B можно добраться через C.

Задача 6. Ответ: девочек было больше, чем мальчиков.

Решение. Пусть мальчиков было m, а девочек d. Построим граф, в котором вершины будут двух цветов: синие будут обозначать мальчиков, а красные — девочек. Рёбра будут соединять только вершины разных цветов, причём в том и только в том случае, если соответствующие мальчик и девочка танцевали на дискотеке. Так как из каждой синей вершины выходит ровно 10 рёбер, а у каждого ребра есть ровно один синий конец, то количество рёбер в нашем графе равно $10m$. Из аналогичных соображений можно получить, что оно также равно $9d$. Значит, $10m = 9d$ или $m = 0,9d$. Следовательно, девочек было больше.

Впрочем, если задачу переформулировать в равносильную, но с другим сюжетом, то решение становится очевидным.

К празднику было куплено несколько тортов, и каждый разрезан на 9 кусков. Каждому пришедшему досталось по 10 кусков. Чего было меньше: пришедших или тортов?

Здесь сразу ясно, что поскольку каждому досталось по $\frac{10}{9}$ торта, то тортов было меньше.

Приложение

Формальные определения

Поскольку изучение теории графов начинается в достаточно раннем возрасте, многие определения школьникам вводятся неформально. Но мы считаем, что учителю полезно знать и формальные математические определения — их мы и формулируем в данном приложении.

Граф — это пара (V, E), где V — некоторое множество, называемое множеством вершин графа, а E — множество пар (u, v), где u, $v \in V$.

В этой книге мы рассматривали только графы с конечным числом вершин.

Для школьников достаточно сформулировать примерно такое (нестрогое) определение: граф состоит из вершин (которые мы будем изображать точками на плоскости), некоторые из которых соединены рёбрами (которые на плоскости мы будем изображать линиями).

Два графа (V_1, E_1) и (V_2, E_2) называются *изоморфными*, если существует биекция $f\colon V_1 \to V_2$, такая что $(u, v) \in E_1$, тогда и только тогда, когда $(f(u), f(v)) \in E_2$.

Для школьников это определение можно сформулировать так: будем считать *одинаковыми* (изоморфными) графы, если можно так занумеровать их вершины, что ребра в обоих графах соединяли пары вершин с одними и теми же номерами. Далее полезно привести пример.

Путь — это последовательность вершин и рёбер v_1, e_1, v_2, e_2, …, e_{n-1}, v_n, где $e_i = (v_i, v_{i+1})$. Вообще говоря, вершины и рёбра в пути могут повторяться, а пути, в которых каждая вершина встречается лишь один раз, называют *простыми*. Но часто, используя термин *путь*, подразумевают простой путь.

Цикл — это путь, в котором последняя вершина совпадает с первой. Аналогично простому пути можно ввести понятие *простого цикла.*

Список литературы

1. Горбачев Н. В. *Сборник олимпиадных задач по математике.* — М: МЦНМО, 2004.

2. *Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике.* — СПб: Невский диалект, 2006.

3. *Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы.* — Киров: АСА, 1994.

4. Мерзляков А. С. *Факультативный курс по математике.* — Ижевск: Удмуртский университет, 2002.

5. Спивак А. В. *Математический праздник.* — М: Бюро Квантум, 2004.

Список веб-ресурсов

1. `www.problems.ru` — база задач по математике.

2. `mmmf.math.msu.su` — сайт Малого мехмата МГУ.

Оглавление